ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

P'

Concours d'admission 1979

MATHEMATIQUES I - P' (2 pages dactylographiées)

N.B. On ne répondra qu'aux questions explicitement posées dans le texte ; ainsi, on ne démontrera pas la linéarité des applications D , $\mathcal{S}$, σ .

Notations et rappels.

Tous les espaces vectoriels considérés dans ce problème sont sur le corps $\mathbb{C}$. On note B l'espace vectoriel des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ bornées ; on rappelle que l'application de B dans $\mathbb{R}^+$ qui à une suite $a = (a_n)$ associe $\|a\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i|$ est une norme.

Soit P la partie de B formée des suites périodiques :

$a = (a_n) \in P \iff \exists p \in \mathbb{N}^* : \forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_{n+p} = a_n$,

on dira alors que p est une période de la suite a.

Le but de ce problème est l'étude de diverses propriétés de l'ensemble P

I- Propriétés algébriques de P.

I-1) Soit $a \in P$. Que peut-on dire de l'ensemble des périodes de a ?

Montrer que P est un sous- espace vectoriel de B. Que peut-on dire de sa dimension ?

I-2) Soient $a \in P$, et p une période de a.

On pose $\mu(a) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} a_i$. Montrer que ce nombre est indépendant du choix de la période p et que l'application $\mu : P \to \mathbb{C}$ qui à $a \in P$ associe $\mu(a) \in \mathbb{C}$ est une forme linéaire sur P dont on notera P_0 le noyau.

I-3) Soit $a \in P$; on considère la suite Da définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (Da)_n = a_{n+1} - a_n$.

Montrer que Da appartient à P. Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme D de P.

I-4) Soit $a \in P$; montrer qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$(I + D)^q (a) = a$, I désignant l'application identique de P.

En déduire les valeurs propres et les espaces propres de D.

I-5) Soient $a \in P_0$ et $\mathcal{S}a$ la suite définie par $(\mathcal{S}a)_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Montrer que $\mathcal{S}a$ appartient à P. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $\mathcal{S}$.

II- Propriétés analytiques de P.

II-1) Soient p et r deux éléments fixés de $\mathbb{N}^*$, k un élément variable de $\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une constante $\Gamma_{p,r}$ telle que:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{r + ip} = \frac{1}{p} \operatorname{Log} k + \Gamma_{p,r} + \varepsilon_{p,r}(k) \qquad (1)$$

où $\varepsilon_{p,r}(k)$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

II-2) A la suite $a = (a_n) \in P$ on associe la série $\{v_n\}$ de terme général $v_n = \frac{a_n}{n}$. On pose :

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}$. Soit p une période de a. En appliquant (1) à la suite $(S_{kp})_{k \in \mathbb{N}^*}$, montrer que, si la série $\{v_n\}$ est convergente, alors la suite a appartient à P_0.

II-3) Inversement montrer que, si a appartient à P_0, alors la série $\{v_n\}$ converge.

On notera $\sigma(a)$ la somme de cette série; l'application $\sigma : P_0 \to \mathbb{C}$ qui à a fait correspondre $\sigma(a)$ est une forme linéaire sur P_0.

- Calculer $\sigma(a)$ lorsque a est la suite suivante :

  $a = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots)$ (période 4)

- Calculer $\sigma(a)$ lorsque a est la suite de période p définie par $a_n = 1$ si p ne divise pas n , $a_n = 1 - p$ si $n = kp$.

(on écrira $S_{kp} = \sum_{i=1}^{kp} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ et on utilisera (1).

.../...

III Propriétés topologiques de P.

Pour démontrer la continuité de certains homomorphismes figurant dans cette partie, ou pour établir la non-continuité de certains autres, on utilisera en l'admettant, la caractérisation suivante :"un homomorphisme u d'un espace normé (E,N) dans un espace normé(F,N') est continu si et seulement s'il existe une constante k telle que :

$$\forall x \in E , \quad N'(u(x)) \leqslant k\, N(x) \quad "$$

Si u est continu, on définit la norme de u relativement à (E,N) et (F,N') par :

$$|||u||| = \inf \{ k \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in E, \quad N'(u(x)) \leqslant kN(x) \} .$$

Lorsqu'on parlera de forme linéaire continue, on sous-entendra que l'espace d'arrivée est $\mathbb{C}$ muni de la norme $| \; | : z \longmapsto |z|$ (module de z).

III-1) On munit P de la norme $\| \; \|_\infty$ (restreinte à P). Montrer que l'endomorphisme D (défini dans I-3)) est continu. Quelle est sa norme ?

III-2) L'application linéaire $\mathcal{S} : P_o \longrightarrow P$ (définie dans I-5)) est-elle continue ? On pourra utiliser la suite $\gamma = (\gamma_n)$ définie(pour $p \in \mathbb{N}^*$ fixé) par :
$\gamma_n = 1$ si $2kp < n \leqslant (2k+1)p$, $\gamma_n = -1$ si $(2k+1)p < n \leqslant (2k+2)p$.

III-3) $\gamma = (\gamma_n)$ étant la suite définie à la question précédente, montrer que

$$\sigma(\gamma) = \int_0^1 \frac{1 - t^p}{(1-t)(1+t^p)} \, dt$$

Calculer $\sigma(\gamma)$ pour p = 1, puis pour p = 2.
Démontrer que $\sigma(\gamma)$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$. Que peut-on conclure sur la continuité de σ ?

III-4) Soit la norme N définie sur P_o par :

$$\forall a \in P_o \qquad N(a) = \| \mathcal{S} a \|_\infty .$$

Montrer que :

$$\forall a \in P_o : \quad \|a\|_\infty \leqslant 2\, N(a).$$

Les deux normes $\| \; \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

III-5) Démontrer que la forme linéaire σ est continue relativement à (P_o, N) et $(\mathbb{C}, | \; |)$ et trouver un majorant de sa norme (on remarquera que :

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + .. + \frac{a_n}{n} = \frac{(\mathcal{S}a)_1}{1} + \frac{(\mathcal{S}a)_2 - (\mathcal{S}a)_1}{2} + \ldots\ldots + \frac{(\mathcal{S}a)_n - (\mathcal{S}a)_{n-1}}{n}).$$

Soit ψ la suite définie (pour $p \geqslant 2$ fixé) par : $\psi_n = 1$ si $n \equiv 1 \bmod p$, $\psi_n = -1$ si $n \equiv p \bmod p$, $\psi_n = 0$ pour les autres valeurs de n.
Montrer que :

$$1 - \frac{1}{p} \leqslant \sigma(\psi) \leqslant 1 .$$ En déduire la norme de σ.

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°
°°°°°°°°°°°°°
°°°°°°°
°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail